Previously on Beligiannis

NO: 25-05-16
Date:

Έστω R: δακτύλιος και I: ιδεώδες του R, τότε:

$(R/I, +, \cdot)$: δακτύλιος, με πράξεις:

$\to (r+I)+(s+I) = (r+s)+I$ και $(r+I)\cdot(s+I) = (rs)+I$

Ο R/I: δακτύλιος πηλίκο του R ως προς το ιδεώδες I

→ Αν το R έχει μονάδα, τότε ο δακτύλιος πηλίκο R/I έχει μονάδα: $1_R + I$

→ Αν ο R: μεταθετικός, τότε R/I: μεταθετικός

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $f: R \to S$, ομομορφισμός δακτυλίων, τότε:

Ο πυρήνας $\ker(f)$ είναι ιδεώδες του R

<u>Αντίστροφα</u>: Έστω I ένα ιδεώδες του δακτυλίου R

Ορίζουμε απεικόνιση $\vartheta: R \to R/I$, $\vartheta(x) = x+I$

Τότε: $\vartheta(x+y) \overset{\text{ορ}}{=} (x+y)+I = (x+I)+(y+I) = \vartheta(x)+\vartheta(y)$

• $\vartheta(x\cdot y) = (x\cdot y)+I = (x+I)\cdot(y+I) = \vartheta(x)\cdot\vartheta(y)$

Αν ο R έχει μονάδα, τότε $\vartheta(1_R) = 1_R + I = 1_{R/I}$

Προφανώς η ϑ: επί και άρα η ϑ: επιμορφισμός δακτυλίων

Η ϑ καλείται η κανονική προβολή του R στον R/I

NO:
Date:

$$Ker(\vartheta) = \{x \in R \mid \vartheta(x) = O_{R/I}\} = \{x \in R \mid x + I = I\} =$$

$$= \{x \in R \mid x \in I\} = I$$

• **1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων**

Έστω $f: R \to S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων

Ο f επάγει έναν ισομορφισμό δακτυλίων

$$\bar{f}: R/Ker(f) \cong Im(f), \ \bar{f}[x + Ker(f)] = f(x)$$

Απόδειξη: Από τη Θεωρία Ομάδων, έπεται ότι η απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός ομάδων.

Μένει νδο $\bar{f}[(x + Ker(f)) \cdot (y + Ker(f))] =$

$$= \bar{f}(x + Ker f) \cdot \bar{f}(y + Ker f)$$

Πράγματι: $\bar{f}[(x + Ker f)(y + Ker f)] =$

$= \bar{f}[xy + Ker f] = f(xy) = f(x) \cdot f(y) =$

$= \bar{f}[x + Ker(f)] \cdot \bar{f}[y + Ker f]$

Πόρισμα: Έστω $f: R \to S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων

Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων:

$$\boxed{R / Ker f \cong S}$$

<u>Παράδειγμα</u>: ① Θεωρούμε το δακτύλιο R

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{υποδ.}}{\subseteq} M_2(\mathbb{R})$$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \underset{\text{ιδεώδες}}{\subseteq} R.$$ Θέλουμε να

περιγράψουμε το δακτύλιο πηλίκο R/I

Έστω $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I =$

$= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I \right) + \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I \right) = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I \right) + I =$

$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + I$

Ορίζω απεικόνιση $f: R \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $f\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \to (a,c)$

Εύκολα, βλέπουμε ότι f: επιμορφισμός δακτυλίων

Για παράδειγμα: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \right) = f\left(\begin{pmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} \right)$

$= (ax, cz) = (a,c)(x,z) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) \cdot f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \right)$

Άρα, η f: επιμορφισμός δακτυλίων

NO:
Date:

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; f\begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (0,0) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; (\alpha, c) = (0,0) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; \alpha = c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; b \in R \right\} = I$$

Απ' το 1ο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων, έχουμε $R/I \cong R \times R$

<u>Παράδειγμα</u>: Να περιγραφεί ο δακτύλιος πηλίκο $R[t]/(t^2+1)$. {Υπενθύμιση: $(t^2+1) = \{(t^2+1)\cdot Q(t) \in R[t] \mid Q(t) \in R[t]\}$}

Απ' την Ευκλείδεια Διαίρεση του $P(t)$ με το (t^2+1) έχουμε: $\deg R(t) < \underbrace{\deg(t^2+1)}_{=2}$

$$P(t) + (t^2+1) = (t^2+1)Q(t) + R(t) + (t^2+1) =$$

$$= \big((t^2+1)Q(t) + (t^2+1)\big) + \big(R(t) + (t^2+1)\big) =$$

$$= (t^2+1) + \big(R(t) + (t^2+1)\big) = R(t) + (t^2+1)$$, όπου

$R(t) = 0$ ή $R(t)$: πρωτοβάθμιο

Στην τελευταία περίπτωση: $R(t) = \alpha + bt$

Άρα, κάθε στοιχείο στο δακτύλιο πηλίκο είναι της μορφής (t^2+1) ή $\alpha + bt + (t^2+1)$

NO:
Date:

Ορίζουμε απεικόνιση, $\phi: \mathbb{R}[t]/(t^2+1) \to \mathbb{C}$, i) $\phi(0+(t^2+1))=0$

ii) $\phi(a+bt+(t^2+1))=a+bi$

Η απεικόνιση είναι ένας ισομορφισμός δακτυλίων

$\Big(\phi(a+(t^2+1))=a, \ \phi(bt+(t^2+1))=bi$

$\phi(t^2+(t^2+1))=-1$, διότι $t^2=(t^2+1)-1$ $\Big)$

$\hookrightarrow \phi(-1+(t^2+1))$

$$\phi\left[\left((a+bt)+(t^2+1)\right)\cdot\left((c+dt)+(t^2+1)\right)\right]=$$

$$=\phi\left[\left(ac+(ad+bc)t+bdt^2\right)+(t^2+1)\right]=$$

$$=\phi\left[\left(ac+(ad+bc)t-bd\right)+(t^2+1)\right]=$$

$$=\phi\left[(ac-bd)+(ad+bc)t+(t^2+1)\right]=$$

$$=(ac-bd)+(ad+bc)i=(a+bi)(c+di)=$$

$$=\phi\left[(a+bt)+(t^2+1)\right]\cdot\phi\left[(c+dt)+(t^2+1)\right]$$

NO:
Date:

• Ένας διαφορετικός τρόπος

Ορίζουμε απεικόνιση : $\psi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$

$\psi(P(t)) = P(i)$, όπου αν $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

τότε: $P(i) = a_0 + a_1 i + \dots + a_n i^n$

→ Εύκολα βλέπουμε ότι η ψ είναι ομομορφισμός δακτυλίων

→ Η ψ είναι επί διότι: αν $z = a+bi \in \mathbb{C}$, τότε

$\psi(a+bt) = a+bi = z$

Ισχυρισμός: $\ker(\psi) = (t^2+1)$

• Αν $P(t) \in (t^2+1) \Rightarrow P(t) = (t^2+1) \cdot Q(t)$, όπου $Q(t) \in \mathbb{R}[t]$

$\psi(P(t)) = P(i) = (i^2+1) Q(i) = 0 \Rightarrow P(t) \in \ker(\psi)$

Άρα, $(t^2+1) \subseteq \ker(\psi)$ (1)

Έστω $P(t) \in \ker(\psi) \Rightarrow \psi(P(t)) = 0 \Rightarrow P(i) = 0$

Με Ευκλείδεια Διαίρεση, προκύπτει:

$P(t) = (t^2+1) Q(t) + R(t)$, όπου $R(t) = 0$ ή $\deg(R(t)) < \underbrace{\deg(t^2+1)}_{=0}$

Όμως, $0 = P(i) = (i^2+1) Q(i) + R(i) = R(i)$

NO:
Date:

Αν $R(t) \neq 0$, τότε $R(t) = a + bt$ και άρα

$0 = R(i) = a + bi \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow R(t) = 0 \to$ Άτοπο !

Οπότε, $R(t) = 0$ και συνεπώς: $P(t) = (t^2+1) \cdot Q(t) \Rightarrow$

$P(t) \in (t^2+1)$

$\Rightarrow Ker(\psi) \subseteq (t^2+1)$ ② Από τις σχέσεις ①, ② προκύπτει ο ισχυρισμός.

Άρα, απ' το πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων, $\mathbb{R}[t^2+1] / (t^2+1) \cong \mathbb{C}$

Παράδειγμα ③: Να περιγραφεί ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{R}[t]/(t^2-4)$

Λύση: Ορίζουμε απεικόνιση $f: \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$f(P(t)) = (P(2), P(-2))$. {Άσκηση: f: επιμορφισμός δακτυλίων}

Ισχυρισμός: Ο $Ker(f) = (t^2-4)$

• Έστω $P(t) \in (t^2-4) \Rightarrow P(t) = (t^2-4) \cdot Q(t)$, για κάποιο

$Q(t) \in \mathbb{R}[t]$. Τότε: $f(P(t)) = (P(2), P(-2)) = (0,0)$

$\Rightarrow P(t) \in ker(f)$, άρα $(t^2-4) \subseteq Ker(f)$ ①

Έστω $P(t) \in Ker(f) \Rightarrow f(P(t)) = (0,0) \Rightarrow (P(2), P(-2)) = (0,0)$

$\Rightarrow P(2) = P(-2) = 0$

NO:
Date:

$$\Rightarrow \begin{cases} (t-2) \mid P(t) \\ (t+2) \mid P(t) \end{cases} \xrightarrow[\text{κοινό παράγοντα}]{(t-2),(t+2)\text{: δεν έχουν}} (t-2)(t+2) \mid P(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(t) = (t^2-4)\,Q(t)$, για κάποιο $Q(t) \in \mathbb{R}(t)$

Άρα: $P(t) \in (t^2-4)$ κι επομένως, $\ker(f) \subseteq (t^2-4)$ (2)

Απ' τις (1),(2) $\Rightarrow \ker(f) = (t^2-4)$

Συνεπώς, απ' το 1º Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων:

$$\mathbb{R}[t]/(t^2-4) \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

3º Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων

Έστω R: δακτύλιος και I, J: ιδεώδη του R, έτσι ώστε: $I \subseteq J$.

Τότε η ομάδα πηλίκο: $J/I = \{x+I \in R/I \mid x \in J\}$ είναι ιδεώδες του R και υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων:

$$R/I \big/ J/I \cong R/J$$

Το παρακάτω είναι γνωστό και σαν freshman's Theorem

NO:
Date:

Απόδειξη: Ορίζουμε απεικόνιση $f: R/I \to R/J$

$f(r+I) = r+J$

Η απεικόνιση f: είναι καλά ορισμένη, διότι:

Αν $\left.\begin{array}{l} r+I = s+I \Rightarrow r-s \in I \\ (I \subseteq J) \end{array}\right\} \Rightarrow r-s \in J \Rightarrow$

$\Rightarrow r+J = s+J \Rightarrow f(r+I) = f(s+I)$

Προφανώς απ' τον τρόπο ορισμού της, η f είναι επιμορφισμός δακτυλίων

$Ker(f) = \{ r+I \in R/I \mid f(r+I) = 0_{R/J} \} = \{ r+I \in R/I \mid r+J = J \}$

$= \{ r+I \in R/I \mid r \in J \} = J/I$

Άρα, J/I: ιδεώδες του R/I και απ' το πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων προκύπτει:

$R/I \big/ J/I \cong R/J$

Πρόβλημα: Ποια είναι η περιγραφή των ιδεωδών ενός δακτυλίου πηλίκο R/I;

NO:
Date:

Θεώρημα: Έστω I: ιδεώδες του δακτυλίου R. Τότε ένα υποσύνολο K του R/I είναι ιδεώδες $\Leftrightarrow$

$K = J/I$ όπου J: ιδεώδες του R έτσι ώστε $I \subseteq J$

Απόδειξη: Αν J είναι ένα ιδεώδες του R έτσι ώστε να περιέχει το I ($I \subseteq J$), τότε απ' το 3º Θεώρημα Ισομορφισμών Δακτυλίων $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το J/I είναι ιδεώδες του R/I

Αντίστροφα: Αν K: ιδεώδες του R/I

Θεωρούμε την κανονική προβολή

$\vartheta: R \to R/I$, $\vartheta(r) = r + I$, και θέτουμε:

$J \stackrel{\varphi}{=} \vartheta^{-1}(K) = \{r \in R \mid \vartheta(r) \in K\}$

Επειδή $I = \ker(\vartheta) = \vartheta^{-1}(\{0_{R/I}\}) \subseteq \vartheta^{-1}(K) = J$

διότι $\{0_{R/I}\} \subseteq K$. Άρα, $I \subseteq J$

Αν $\left.\begin{matrix} x, y \in J \\ r \in R \end{matrix}\right\}$ Τότε: $\vartheta(x), \vartheta(y) \in K$

NO:
Date:

Επειδή το K: ιδεώδες του $R/I \Rightarrow \vartheta(x)-\vartheta(y) \in K$

$\Rightarrow \vartheta(x-y) \in K \Rightarrow x-y \in \vartheta^{-1}(K) = J$

$\vartheta(r) \in R/I$. Επειδή K: ιδεώδες του $R/I \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \vartheta(x)\vartheta(r) \\ \vartheta(r)\vartheta(x) \end{matrix}\right. \in K \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \vartheta(x\cdot r) \\ \vartheta(r\cdot x) \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x\cdot r \\ r\cdot x \end{matrix}\right. \in \vartheta^{-1}(K) = J$$

Άρα: J: ιδεώδες του R.

Τέλος, $J/I = \{r+I \in R/I \mid r \in J\} = \{r+I \in R/I \mid \vartheta(r) \in K\} =$

$= \{r+I \in R/I \mid r+I \in K\} = K$

<u>Παράδειγμα:</u> ① Τα ιδεώδη του $Z_n \cong Z/nZ$

Από το Θεώρημα $\Rightarrow$ Τα ιδεώδη του Z/nZ είναι της μορφής: J/nZ, J: ιδεώδες του Z με την ιδιότητα να περιέχει το nZ ($nZ \subseteq J$)

Τότε επειδή τα ιδεώδη του Z είναι της μορφής mZ, όπου $m = 0,1,2,\ldots$ έπεται ότι $J = mZ$, $m=0,1,2$

NO:
Date:

Όμως $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m|n$

Άρα τα ιδεώδη $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ είναι της μορφής $m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, όπου $m|n$.

Επομένως τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_n$ είναι όλα κύρια. και είναι της μορφής : $[m]_n$, όπου $m|n$

<u>Ιδιαίτερα:</u> Ο $\mathbb{Z}_n$ είναι δακτύλιος κύριων ιδεωδών αλλά όχι περιοχή

<u>Παράδειγμα 2:</u> Έστω K: σώμα και $P(t) \in K[t]$

Θα περιγράψουμε τα ιδεώδη του δακτυλίου πηλίκο $K[t]/(P(t))$.

Τα ιδεώδη του $K[t]/(P(t))$ είναι της μορφής : $J/P(t)$, όπου J: ιδεώδες του $K[t]$, έτσι ώστε $(P(t)) \subseteq J$. Επειδή κάθε ιδεώδες του $K[t]$ είναι κύριο $\Rightarrow$ $J = (Q(t))$

Επειδή $(P(t)) \subseteq (Q(t)) \Leftrightarrow Q(t) | P(t)$

Άρα, τα ιδεώδη του $K[t]/(P(t))$ είναι όλα κύρια και είναι της μορφής: $(Q(t))/P(t)$ όπου $Q(t)|P(t)$

NO:
Date:

<u>Παρατήρηση</u>: $R[t]/(t^2-1) \cong \mathbb{C} \to$ (σώμα)

$R[t]/(t^2-4) \cong R\times R$ (όχι σώμα - όχι ακέραια περιοχή)

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \to$ σώμα

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4 \to$ όχι σώμα - όχι ακέραια περιοχή

<u>Πρόβλημα</u>: Έστω R: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

Πότε τα μόνα ιδεώδη του R είναι: $\{0\}$ και R;

<u>Ορισμός</u>: Ένας δακτύλιος R καλείται απλός αν τα μόνα του ιδεώδη είναι: $\{0\}$, R

Ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα είναι απλός $\Leftrightarrow$ Ο δακτύλιος είναι <u>σώμα</u>.

Έστω ότι ο R: σώμα και I: ιδεώδες του R.

Αν $I \neq 0 \Rightarrow \exists\, \alpha \in I$, $\alpha \neq 0$

Επειδή R: σώμα $\Rightarrow \alpha$: αντιστρέψιμο και άρα

$$\exists\, \alpha' \in R: \left.\begin{array}{l} \alpha'\cdot\alpha = 1_R \\ \alpha' \in R \\ \alpha \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha'\cdot\alpha = 1_R \in I$$

Τότε $\forall\, r \in R: r = r\cdot 1_R \in I$

NO:
Date:

Άρα $R \subseteq I$, οπότε $R = I$. R: απλός δακτύλιος

<u>Αντίστροφα:</u> Έστω ότι ο R: μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα είναι <u>απλός</u>.

Έστω $a \in R$, $a \neq 0$. Έστω $(a) = \{r \cdot a \in R \mid r \in R\}$: κύριο ιδεώδες που παράγεται απ' το a

Επειδή ο R: απλός $\Rightarrow (a) = \{0\}$ ή $(a) = R$

Επειδή $a \neq 0$, έπεται ότι: $(a) \neq \{0\}$

$(a) = R \ni 1_R \Rightarrow \exists\, r \in R: r \cdot a = 1_R = a \cdot r$

Άρα, <u>a: αντιστρέψιμο</u>, συνεπώς R: <u>σώμα</u>

(!) <u>Σχόλιο:</u> Υπάρχουν απλοί δακτύλιοι (μη-μεταθετικοί) οι οποίοι <u>δεν</u> είναι σώματα (πχ: ο $M_2(\mathbb{R})$)
↳ όχι σώμα - όχι ακ. περ.

<u>Παράδειγμα:</u> $R = End_K(V) = \{f: V \to V \mid f:$ γραμμική απεικόνιση$\}$

V: διανυσματικός χώρος, $\dim V = n \Rightarrow R$: απλός δακτύλιος
K: σώμα
↳ R: όχι σώμα - όχι ακέρ. περιοχή

• $\dim V = \infty \Rightarrow$ ο R: όχι απλός, διότι

$I = \{f \in R \mid r(f) < \infty\} \underset{\text{ιδεώδες}}{\subseteq} R$, όχι το μηδενικό
↳ rank(f) όχι όλος ο R